大学数学のアトリエ｜線形代数　第 4 章　ベクトル空間

No.3　基底と次元

この回のゴール

- 生成系・基底の定義を述べ，与えられた組が基底かどうか判定できる．
- 基底に関する座標を求められる．
- 「基底を構成するベクトルの個数は基底の選び方によらない」理由を説明でき，次元を求められる．
- 1 次独立な組を基底に延長できる．

以下，V をベクトル空間とする．

■ 1. 生成系

定義 1　生成系

V のすべてのベクトルが $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ の 1 次結合で表されるとき，すなわち

$$V = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle$$

のとき，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ は V を**生成する**といい，$\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$ を V の**生成系**という．

例 1

(a) $\mathbb{R}^3$ は $\boldsymbol{e}_1 = {}^t(1, 0, 0), \boldsymbol{e}_2 = {}^t(0, 1, 0), \boldsymbol{e}_3 = {}^t(0, 0, 1)$ で生成される．${}^t(x, y, z) = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$ だから．

(b) $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ に ${}^t(1, 1, 1)$ を加えた 4 本も $\mathbb{R}^3$ を生成する．生成系にベクトルを付け加えても生成系のまま．

(c) $\mathbb{R}[x]_2$ は $1, x, x^2$ で生成される．

(b) の 4 本は生成系ではあるが，${}^t(1, 1, 1) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ なので**余分**を含んでいる．余分がなく，しかも全体を生成するもの，それが基底である．

■ 2. 基底と座標

定義 2　基底

$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ が次の 2 条件を満たすとき，組 $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ を V の**基底**という．

(i) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立である．　（余分がない）

(ii) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V を生成する．　（足りないものがない）

例 2　標準的な基底

(a) $\mathbb{R}^n$ の $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$（$\boldsymbol{e}_i$ は第 i 成分だけ 1，他は 0）．**標準基底**という．

(b) $\mathbb{R}[x]_n$ の $1, x, x^2, \dots, x^n$．

(c) $M_{2,2}(\mathbb{R})$ の $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$．

どれも 1 次独立で生成系であることは，成分（係数）を比べればすぐ分かる．

基底を 1 つ決めると，各ベクトルを数の組で表せる．

定理 1　座標

$(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ が V の基底なら，V のどのベクトル $\boldsymbol{x}$ も

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$$

と**ただ 1 通りに**表される．この ${}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ を，基底 $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ に関する $\boldsymbol{x}$ の**座標**（成分）という．

【証明】生成系なので表せる．1 次独立なので表し方は 1 通り（No.2 定理 2）．□

注意

基底は「順番つきの組」として扱う．$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ と $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1)$ では座標の並び順が変わるからである．

例題 1

$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示し，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ のこの基底に関する座標を求めよ．

【解答】$P = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3)$ とおくと $\det P = 1 \neq 0$（第 1 章 No.4 例題 2 の行列）なので，No.2 定理 5 より 1 次独立．また，正則なので任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して $P\boldsymbol{c} = \boldsymbol{x}$ は解 $\boldsymbol{c} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ をもち，生成系でもある．よって基底．

座標は $P\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$ の解．第 1 章 No.4 で求めた P^{-1} を使って

$$\boldsymbol{c} = P^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

つまり $\boldsymbol{b} = 12\boldsymbol{v}_1 - 7\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$．

定理 2　$\mathbb{R}^n$ の基底の判定

$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{R}^n$（ちょうど n 本）について，

$$(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n) \text{ が } \mathbb{R}^n \text{ の基底} \iff \det(\boldsymbol{v}_1\ \cdots\ \boldsymbol{v}_n) \neq 0.$$

【証明】$P = (\boldsymbol{v}_1\ \cdots\ \boldsymbol{v}_n)$ が正則なら，例題 1 と同様に 1 次独立かつ生成系．逆に基底なら 1 次独立なので，No.2 定理 5 (2) より $\det P \neq 0$．□

例題 2

$\mathbb{R}[x]_2$ の基底 $(1,\ x-1,\ (x-1)^2)$ に関する $f(x)=x^2+3x+5$ の座標を求めよ.

【解答】 $t=x-1$ とおくと $x=t+1$ なので

$$f=(t+1)^2+3(t+1)+5=t^2+5t+9=9\cdot 1+5(x-1)+1\cdot(x-1)^2.$$

座標は ${}^t(9,\ 5,\ 1)$.（$1,\ x-1,\ (x-1)^2$ が基底であることは練習問題 3 と同様に示せる.）

コラム：テイラー展開の予告

例題 2 の座標 9, 5, 1 は, $f(1)=9$, $f'(1)=5$, $\frac{f''(1)}{2!}=1$ になっている.「基底 $1,\ (x-a),\ (x-a)^2,\ \ldots$ に関する座標」が**テイラー展開**の係数である（分野「微分積分」第 1 章 No.5）.

■ 3. 基底の個数は一定である

基底は 1 通りではない. しかし, **基底に含まれるベクトルの個数**はいつも同じであることを示そう. 鍵になるのは次の定理である.

定理 3　基本定理

V が m 本のベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{v}_m$ で生成されるならば, V の $m+1$ 本以上のベクトルは必ず 1 次従属である.

【証明】 $\boldsymbol{w}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{w}_k\in V$（$k>m$）とする. 各 $\boldsymbol{w}_j$ は $\boldsymbol{v}_i$ の 1 次結合なので

$$\boldsymbol{w}_j=a_{1j}\boldsymbol{v}_1+a_{2j}\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_{mj}\boldsymbol{v}_m=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\boldsymbol{v}_i\qquad(j=1,\ \ldots,\ k)$$

と書ける. 係数を並べた $m\times k$ 行列を $A=(a_{ij})$ とする. $k>m$ なので, 同次方程式 $A\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ は自明でない解 $\boldsymbol{c}={}^t(c_1,\ \ldots,\ c_k)$ をもつ（第 2 章 No.3 定理 2）. このとき

$$\sum_{j=1}^{k}c_j\boldsymbol{w}_j=\sum_{j=1}^{k}c_j\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\boldsymbol{v}_i=\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{k}a_{ij}c_j\Big)\boldsymbol{v}_i=\sum_{i=1}^{m}0\cdot\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{0}.$$

（$\sum_j a_{ij}c_j$ は $A\boldsymbol{c}$ の第 i 成分で 0.）$\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$ なので, これは $\boldsymbol{w}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{w}_k$ の自明でない 1 次関係である. □

注意

この証明では, 抽象的なベクトル空間の問題を, 係数の行列 A を通して**連立方程式の問題**に置き換えている. 第 2 章で学んだことが, ここで本質的に効いている.

定理 4　基底の個数

V の 2 つの基底 $(\boldsymbol{v}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{v}_n)$, $(\boldsymbol{w}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{w}_m)$ について, $n=m$.

【証明】 $\boldsymbol{v}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{v}_n$ は V を生成し, $\boldsymbol{w}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{w}_m$ は 1 次独立なので, 定理 3 より $m\le n$. 役割を入れ替えれば $n\le m$. よって $n=m$. □

定義 3　次元

V が n 本のベクトルからなる基底をもつとき，n を V の**次元**といい，$\dim V = n$ と書く．零ベクトルだけからなる空間 $\{\boldsymbol{0}\}$ の次元は 0 と約束する．有限個のベクトルからなる基底をもつ空間を**有限次元**，そうでない空間を**無限次元**という．

例 3

$$\dim \mathbb{R}^n = n, \qquad \dim \mathbb{R}[x]_n = n+1, \qquad \dim M_{m,n}(\mathbb{R}) = mn.$$

$\mathbb{R}[x]_n$ は $x^0 = 1$ を含むので $n+1$ になることに注意．多項式全体 $\mathbb{R}[x]$ や関数の空間 $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ は無限次元である（練習問題 6）．

コラム：次元は「自由度」

「次元」は，ベクトルを決めるのに必要な**実数の個数**である．直線は 1 個，平面は 2 個，空間は 3 個の数で位置が決まる．$\mathbb{R}[x]_2$ の多項式は係数 3 個で決まるので 3 次元．第 2 章 No.2 で見た「解の自由度」も，No.4 で解空間の次元として理解できる．

■ 4. 基底の作り方

定理 5

$\dim V = n$ とする．

(1) V の n 本の 1 次独立なベクトルは，V の基底である．

(2) V を生成する n 本のベクトルは，V の基底である．

(3)（**基底の延長**）V の 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$（$k < n$）に，いくつかのベクトルを付け加えて V の基底にできる．

【証明】(1) $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ が 1 次独立で，V を生成しないとする．すると $\langle \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ に入らない $\boldsymbol{b} \in V$ があり，No.2 定理 3 より $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}$ は 1 次独立．しかし V は n 本の基底で生成されるので，定理 3 より $n+1$ 本は 1 次従属．矛盾．

(3) $\langle \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k \rangle \neq V$ なら，そこに入らない $\boldsymbol{a}_{k+1}$ を付け加える．No.2 定理 3 より 1 次独立のまま．これをくり返すと，定理 3 より 1 次独立なベクトルは n 本を超えられないので，ちょうど n 本になったところで止まる．(1) よりそれは基底．

(2) 生成系 $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ が 1 次従属なら，No.2 定理 1 より他の 1 次結合で書ける 1 本を除いても生成系のまま．これをくり返すと，1 次独立な生成系（基底）が n 本未満で得られてしまい，定理 4 に反する．よって初めから 1 次独立で，基底．　□

注意

$\dim V = n$ が分かっていれば，n 本の組が基底かどうかは「1 次独立」か「生成系」の**どちらか片方**を確かめれば十分である．$\mathbb{R}^n$ では，n 本を並べた行列の行列式が 0 でないかを見ればよい（定理 2）．

例題 3

$\boldsymbol{a}_1 = {}^t(1,\,1,\,0)$，$\boldsymbol{a}_2 = {}^t(0,\,1,\,1)$ に 1 本付け加えて，$\mathbb{R}^3$ の基底を作れ．

【解答】 標準基底の中から，$\langle \boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2 \rangle$ に入らないものを探す．$\boldsymbol{e}_1$ を付け加えると

$$\det(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{e}_1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

よって $(\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\boldsymbol{e}_1)$ は $\mathbb{R}^3$ の基底．（$\boldsymbol{e}_3$ を付け加えても基底になる．付け加え方は 1 通りではない．）

■ 練習問題

1. $\boldsymbol{v}_1 = {}^t(1,\,0,\,1)$，$\boldsymbol{v}_2 = {}^t(1,\,1,\,0)$，$\boldsymbol{v}_3 = {}^t(0,\,1,\,1)$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示し，$\boldsymbol{b} = {}^t(2,\,3,\,5)$ のこの基底に関する座標を求めよ．

2. 次の組は $\mathbb{R}^3$ の基底か．

(1) ${}^t(1,\,2,\,3)$，${}^t(4,\,5,\,6)$，${}^t(7,\,8,\,9)$

(2) ${}^t(1,\,0,\,0)$，${}^t(1,\,1,\,0)$

(3) ${}^t(1,\,0,\,0)$，${}^t(1,\,1,\,0)$，${}^t(1,\,1,\,1)$，${}^t(0,\,0,\,1)$

3. $1,\ 1+x,\ 1+x+x^2$ は $\mathbb{R}[x]_2$ の基底であることを示し，$f(x) = 3 - x + 2x^2$ の座標を求めよ．

4. $\boldsymbol{a} = {}^t(1,\,2,\,-1)$ に 2 本付け加えて $\mathbb{R}^3$ の基底を作れ．

5. 次の空間の次元を答えよ．

(1) $\mathbb{R}[x]_3$　　(2) $M_{2,3}(\mathbb{R})$　　(3) $\mathbb{R}^5$

6. （考えてみよう）多項式全体 $\mathbb{R}[x]$ が無限次元であることを示せ．（ヒント：$\dim \mathbb{R}[x] = n$ と仮定して，$1,\,x,\,\ldots,\,x^n$ を考える．）

■ 練習問題の解答

1. $\det(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3) = 2 \neq 0$（No.2 練習問題 1 (1)）なので，定理 2 より基底．$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{b}$ を解くと $c_1 + c_2 = 2$，$c_2 + c_3 = 3$，$c_1 + c_3 = 5$．3 式を足して $c_1 + c_2 + c_3 = 5$．ここから $c_3 = 3$，$c_1 = 2$，$c_2 = 0$．座標は ${}^t(2,\,0,\,3)$．

2. (1) 基底でない．行列式が 0（第 1 章 No.5 練習問題 2 でランク 2）．(2) 基底でない．$\dim \mathbb{R}^3 = 3$ なので 2 本では生成できない（たとえば $\boldsymbol{e}_3$ が作れない）．(3) 基底でない．4 本は 1 次従属（No.2 定理 5 (3)）．（生成系ではある．）

3. 3 本で $\dim \mathbb{R}[x]_2 = 3$ なので，1 次独立を示せばよい．$c_1 + c_2(1+x) + c_3(1+x+x^2) = 0$ とすると，x^2 の係数から $c_3 = 0$，x の係数から $c_2 + c_3 = 0$ で $c_2 = 0$，定数項から $c_1 = 0$．
座標：$a + b(1+x) + c(1+x+x^2) = 3 - x + 2x^2$ とおくと，$c = 2$，$b + c = -1$，$a + b + c = 3$．よって $c = 2$，$b = -3$，$a = 4$．座標は ${}^t(4,\,-3,\,2)$．

4. 例えば $\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ を付け加えると $\det(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ で基底になる．

5. (1) 4（基底 $1, x, x^2, x^3$）．(2) 6．(3) 5．

6. $\dim \mathbb{R}[x] = n$ と仮定する．$1, x, \ldots, x^n$ の $n+1$ 本は 1 次独立である（$c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = 0$ なら，多項式として 0 なのですべての係数が 0）．ところが定理 3 より，n 次元の空間の $n+1$ 本は 1 次従属でなければならない．矛盾．よって $\mathbb{R}[x]$ は有限次元でない．